29/04/2019

Φυλλάδιο #7.

Άσκηση 2.

ΒΗΜΑ 1ο: Υπολογίζουμε $\chi_A(x)$. Μετά τις πράξεις $\chi_A(x) = -(x-1)\,x\,(x-3)$. Επομένως, οι ιδιοτιμές του A θα είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ με πολ/τητα 1.

Υπολογισμός $V_A(0)$: Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι $V_A(0)$ είναι η διαγώνιος $V_A(0) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ορθ. βάση $g_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Υπολογισμός $V_A(1)$. Μετά τις πράξεις $V_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbr{R} \right\}$ με ορθοκανονική

Βάση $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ για

Υπολογίζουμε $V_A(3)$ μετά τις πράξεις $V_A(3) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

με ορθοκανονική βάση $g_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$. Επομένως, θέτουμε P

$$P = [g_1^t | g_2^t | g_3^t] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος και $P^t A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ α) Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή. Η q λέγεται θετικά ορισμένη αν $q(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{n} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$

Η q λέγεται αρνητικά ορισμένη αν $q(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός ο A λέγεται θετικά ορισμένος ~~.....~~ αν κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική $\Leftrightarrow$

~~....~~ Αν $Tr(X^t A X) > 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$

A αρνητικά ορισμένος αν κάθε ιδιοτιμή αρνητική ισοδύναμα

$(\Leftrightarrow)$ $Tr(X^t A X) < 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$.

ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΘΑ ΔΟΥΜΕ ΤΟ ΕΞΗΣ: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>συμμετρικός</u> για $i = 1,2,3,\ldots,n$ ορίζουμε B_i τον υποπίνακα του A που προκύπτει από τον A κρατώντας τις ~~.....~~ γραμμές $1,2,\ldots,i$ και τις στήλες $1,2,\ldots,i$ του A. Θέτουμε $\Delta_i = \det B_i$

Τότε A θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow \Delta_i > 0$ για κάθε $1 \le i \le n$

Επίσης, A αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$

$\Delta_4 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$ με άλλα λόγια $(-1)^i \Delta_i > 0$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$

Άσκηση 9

$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ Τότε $B_1 = [1]$ $\Delta_1 = \det B_1 = 1$ $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta_2 = \det B_2 = 1 - a^2$ $B_3 = A$ $\Delta_3 = \det B_3 = \det A = 1 - 2a^2$

Έχουμε A θετικά ορισμένος $\iff \{\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0\}$

$\Delta_2 > 0 \iff 1 - a^2 > 0 \iff a^2 < 1 \iff a \in (-1, 1)$

$\Delta_3 > 0 \iff 1 - 2a^2 \iff 2a^2 < 1 \iff a^2 < \frac{1}{2} \iff a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Άρα A θετικά ορισμένος $\iff \left\{ \begin{array}{l} a \in (-1,1) \\ \text{και} \\ a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Αφού πάντα $\Delta_1 > 0$, δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με A αρνητικά ορισμένο.

Άσκηση 4

Αφού A θετικά ορισμένος $Tr(X^t A X) > 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$

Αφού B θετικά ορισμένο $Tr(X^t B X) > 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$

Αφού A,B συμμετρικοί έχουμε $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t = aA + bB$ άρα ο $aA+bB$ συμμετρικός. Έχουμε για $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ $Tr(X^t(aA+bB)X) = Tr(aX^tAX + bX^tBX) = a\,Tr(X^tAX) + b\,Tr(X^tBX) > 0$ (από υπόθεση ς' γιατί $Tr(X^tAX) > 0$, $Tr(X^tBX) > 0$, $a, b \geq 0$ και ($a > 0$ ή $b > 0$))

Άσκηση 1

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος ν.δ.ο. $A + 3I_n$ αντιστρέψιμος.

Αφού A ορθογώνιος από θεωρία έχουμε $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A. Αφού λ ιδιοτιμή του $A \iff A - \lambda I_n$ δεν αντιστρέφεται έχουμε $A - \lambda I_n$ αντιστρέψιμος $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$. Για $\lambda = -3$ το αποτέλεσμα έπεται.

Άσκηση 3

$f(x,y,z) = (ax - y + z, -x + by - z, x - y + 2z)$ f έχει ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 2. Επομένως $\chi_f(x) = -(x-1)^2(x - \lambda_3)$ με $\lambda_3 \neq 1$. Έστω $e = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Θέτουμε $M = [f]_e^e =$

$$= \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

άρα έχουμε $\chi_f(x) = \chi_M(x) = \det(M - xI_3) =$

$$\begin{vmatrix} a-x & -1 & 1 \\ -1 & b-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + bx^2 + ax^2 + 2x^2 - abx - 2bx - 2ax + 3x + 2ab - b - a$$

Έχουμε $\chi_M(1) = 4 + \ldots 2 \ldots 2b = (b-2)(a-2)$ Επομένως, 1 ιδιοτιμή του $M \Leftrightarrow (b-2)(a-2)=0$

Δυο περιπτώσεις

1η: Για να έχει το $X_M(x)$ το 1 ρίζα με πολ/τητα 2 πρέπει το 1 να είναι ρίζα του $c(x)=ax-x^2-3x+2x-2$
$\Leftrightarrow 4-2a=0 \Leftrightarrow a=2$.

Άρα για $b=2$ και $a=2$ έχουμε $c(x)=(x-1)(x-7)$ άρα $X_M(x)=-(x-1)^2(x-2)$ ικανοποιεί την συνθήκη να έχει ρίζα το 1 με πολ/τητα 2.

2η $b=2$ μετά από τις ίδιες πράξεις βρίσκουμε $a=2$ άρα είμαστε όπως στην 1η περίπτωση

Για $a=b=2$ βρίσκουμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$M=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $f(x,y,z)=(2x-y+z,-x+2y-z,x-y+2z)$

$V_f(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(x,y,z)\}$

Μετά από πράξεις $V_f(1)=\{(x,x+z,z) : x,z\in\mathbb{R}\}$

Ο $V_f(1)$ έχει βάση $(1,1,0),(0,1,1)$ που δεν είναι ορθοκανονική με Gram-Schmidt βρίσκουμε ότι ο $V_f(1)$ έχει ορθοκανονική βάση $g_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ $g_2=\left(\frac{-1/2}{\sqrt{3/2}},\frac{1/2}{\sqrt{3/2}},\frac{1}{\sqrt{3/2}}\right)$

Υπολογίζουμε $V_f(4)$ και μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι έχει ορθοκανονική βάση $g_3=(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$. Επομένως g_1,g_2,g_3 είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

Θέτουμε $A=M$. Θέτουμε $P=[g_1^t|g_2^t|g_3^t]$. Τότε έχουμε P ορθογώνιος και $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Θέτουμε $B=$

$=P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[n]{4} \end{bmatrix}P^{-1}$ τότε $B^n=A$